Ορισμός | Έστω $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$.

Η $\bar{f}$ λέγεται διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, αν υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, τ.ω

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \bar{0}$$

Η γραμμική απεικόνιση D, αναπαρίσταται με πίνακα σε 1-1 και επί αντιστοιχία (Γρ. Αλ. I)

• Θεώρημα (Πολύ χρήσιμο).

$\bar{f}$ διαφορίσιμη $\Longrightarrow$ $\bar{f}$ μερικώς διαφορίσιμη και συνεχής, με $D = J_{\bar{f}}$

Απόδειξη

(Για τη συνέχεια)

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \left(\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x})\right) = \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \left(\left(\frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|}\right.\right.$$

$$\left.\left. \|\bar{h}\|\right) + D\bar{h}\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \|\bar{h}\|}_{=\bar{0}} \underbrace{\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h})-\bar{f}(\bar{x})-D\bar{h}}{\|\bar{h}\|}}_{=\bar{0},\ \text{λόγω υπόθεσης}} + \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} D\bar{h}$$

Για το $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} D\bar{h}$, αρκεί να δείξω ότι $\|D\bar{h}\| \xrightarrow[\bar{h}\to\bar{0}]{} 0$

Είναι:

$$0 \leq \|D\bar{h}\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left|(d_{j1}, \ldots, d_{jn})\cdot(h_1, \ldots, h_n)\right|^2$$

$$\underset{\text{Cauchy/Schwarz}}{\leq} \|(d_{j1}, \ldots, d_{jn})\| \cdot \|\bar{h}\|,$$

άρα $\bar{h}\to\bar{0}$, έπεται ότι $\|D\bar{h}\|^2 \to 0$, κι άρα

$\|D\bar{h}\| \to 0$. Έτσι, $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} D\bar{h} = \bar{0}$

Τελικά, $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} (\bar{f}(\bar{x}+\bar{h})-\bar{f}(\bar{x})) = \bar{0} \iff$

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} (\bar{f}(\bar{x}+\bar{h})) = \bar{f}(\bar{x}),\ \forall\, \bar{x}\in U,$$

άρα $\bar{f}$ συνεχής στο U.

(Για τη μερική διαφορισιμότητα)

Είναι:

$$\forall j=1,\dots,m,\ \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{f_j(\bar{x}+\bar{h})-f_j(\bar{x})-(d_{j1},\dots,d_{jn})\bar{h}}{\|\bar{h}\|}=\bar{0}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall \bar{h}\in B(\bar{0},\delta)\setminus\{\bar{0}\}$, να ισχύει

$$\left| \frac{f_j(\bar{x}+\bar{h})-f_j(\bar{x})-(d_{j1},\dots,d_{jn})\bar{h}}{\|\bar{h}\|} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$, να ισχύει

$$\left| \frac{f_j(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f_j(\bar{x})-d_{ji}h}{|h|} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f_j(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f_j(\bar{x})}{h} = d_{ji},$$

δηλαδή $\bar{f}$ μερικώς διαφορίσιμη στο U, με $D=J_{\bar{f}}$

Ορισμός 1 Αν $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, διαφορίσιμη σε κάθε $\bar{x} \in U$, τότε λέμε ότι η $\bar{f}$ είναι διαφορίσιμη (στο U), και η απεικόνιση:

$$D\bar{f}: U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$ (χώρος γραμμ. συναρτήσεων)

με $\bar{x} \longmapsto D\bar{f}(\bar{x})$, καλείται διαφορικό της $\bar{f}$